平成 30 年度 京都府立嵯峨野高校
京都こすもす科数学入試問題解説

Dr. 竹中英数塾 竹中 浩

2018 年 5 月 28 日

概要

今年度の京都府立嵯峨野高等学校 京都こすもす科の数学の入試問題解説です。できるだけ丁寧な解説を行いました（ページ数が限られている赤本よりも詳しいです）。

今年の問題で必ず得点しなければならないのは，大問 1 (1)，(2)，(4)，(5)，大問 2 (1)，(2)，大問 4 (1)，大問 5 (1) です。

最も難しく正答率が低かったと予想されるのは大問 3 です。この問題は捨てても大丈夫ですが、詳しく解説しました。また，大問 1 (3) も正答率が低かったと思われます。三平方の定理を用いて方程式を立てる解法が分からなければ正解するのは難しいです。

大問 6 (1) は，比較的簡単で手計算で数えても解答できますが，(2) は考え方を記述させる問題になっています。これが曲者で，与えられた条件を真正直に使おうとすると解答できません。(3) は，(2) が出来れば解答できます。

嵯峨野高校京都こすもす科の数学の問題は，解答に必要な計算の道具立てこそ中学数学の範囲ですが，高得点を取るためには，高校の数学Ｉ，数学Ａの知識を用いて考える必要があり，数学Ｉ・Ａの基本問題を学習しておく必要があります。例えば今年度の問題では，大問 1 の (3) で平方完成，大問 5 の (2) で一般の二次関数の知識が必要になります。また，大問 6 の (1) は，整数に関する知識があれば解きやすいです。また，(2) には高校レベルの分母の有理化の計算技法が必要です。

最後に，合格するためには確実に得点する問題と捨てるべき問題を見極めなければなりません。しかし，普段の勉強では捨て問にすべき難問に取り組んでください。難問が難問である所以がが理解できていて、初めて実戦での見極めが可能になります。

大問 1

問題

小問 (1)

$11.2^2 \div (-\frac{28}{5}) \times (-\frac{1}{6} - \frac{1}{3})^3$ を計算せよ。

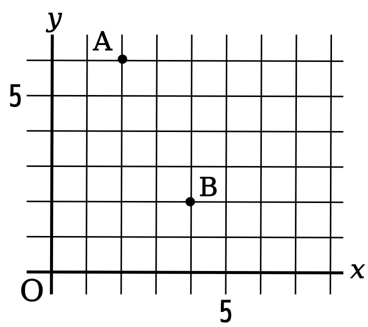
小問 (2)

$x = 1 + \sqrt{3}$，$y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$，$z = 1 + \sqrt{2}$ のとき，$x^2 - y^2 + z^2 + 2xz$ の値を求めよ。

小問 (3)

右の図のように，点 A(2,6), 点 B(4,2) がある。1 から 6 までの目が出る大小 1 個ずつのさいころ 2 個を同時に 1 回投げる。大きいさいころの出る目の数を a，小さいさいころの出る目の数を b とし，図の中に点 P(a, b) を書き込む。このとき，A,B,P を線分で結んでできる図形が，A,B,P を頂点とする直角三角形となる確率を求めよ。

ただし，それぞれのさいころの 1 から 6 までの目の出かたは，同様に確からしいものとする。



小問 (4)

関数 $y = x^2$ のグラフ上に，x 座標が 3 である点 P と，x 座標が 5 である点 Q がある。Q と x 座標が等しく，P と y 座標が等しい点を R とする。R から直線 PQ に垂線をひき，その交点を S とする。△PRS と △RQS の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

次ページに続く

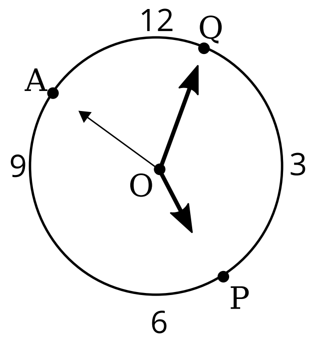
問題（続き）

小問 (5)

次の文中の$\boxed{}$にあてはまる数を求めよ。
右の図のように，円形の時計がある。中心 0 から短針，長針，秒針の先へ伸ばした延長線と円との交点をそれぞれ点 P，点 Q，点 A とする。5 時から 5 時 25 分までの 25 分間において，$\triangle$PAQ=35°になるのは

5 時 14 分 $\dfrac{\boxed{}}{11}$ 秒である。

ただし，短針，長針，秒針はそれぞれ一定の速さで絶えず動くものとする。



解答

小問 (1)

$$\text{与式} = \left(\frac{112}{10}\right)^2 \div \left(-\frac{28}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{6}\right)^3 = \left(\frac{56}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{5}{28}\right) \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{14}{5}$$

小問 (2)

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \left(x^2 + 2zx + z^2\right) - y^2 = (x+z)^2 - y^2 \\ &= (x+z+y)(x+z-y) = (x+y+z)(x-y+z)\end{aligned}$$

$x = 1+\sqrt{3}$，$y = \sqrt{2}+\sqrt{3}$，$z = 1+\sqrt{2}$ を代入する。

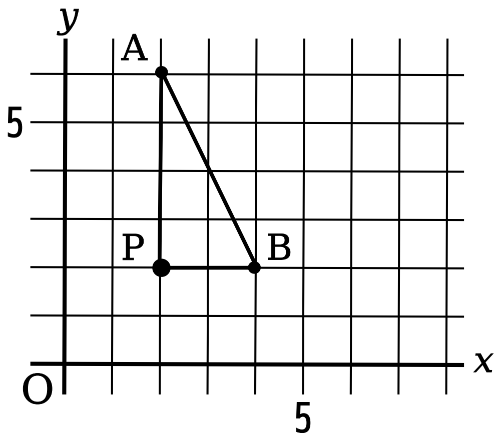
$$x+y+z = (1+\sqrt{3}) + (\sqrt{2}+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{2}) = 2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$x-y+z = (1+\sqrt{3}) - (\sqrt{2}+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{2}) = 2$$

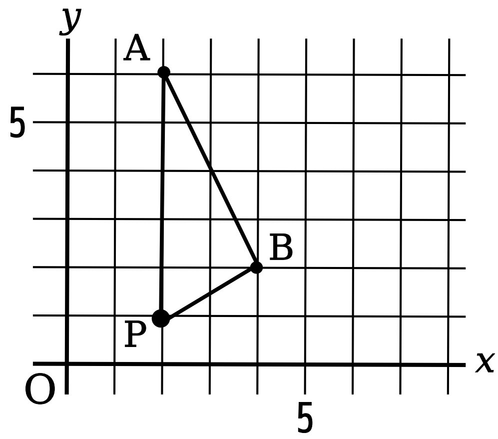
よって，$\underline{\therefore \text{与式} = 2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) \times 2 = 4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

小問 (3)

次頁図のように AB が直角三角形の斜辺になる場合 (a) と直角を作る一辺になる場合 (b) に分て、三平方の定理を用いる。



(a) AB が斜辺になる場合



(b) AB が直角を挟む辺になる場合

■(a)　AB が斜辺の場合，$AB^2 = AP^2 + BP^2$。

ここで，

$$AB^2 = (4-2)^2 + (2-6)^2 = 20$$

$$AP^2 = (a-2)^2 + (b-6)^2$$

$$BP^2 = (a-4)^2 + (b-2)^2$$

よって，

$$(a-2)^2 + (b-6)^2 + (a-4)^2 + (b-2)^2 = 20$$

展開整理して，

$$\left(a^2 - 4a + 4\right) + \left(b^2 - 12b + 36\right) + \left(a^2 - 8a + 16\right) + \left(b^2 - 4b + 4\right)$$
$$= 2a^2 + 2b^2 - 12a - 16b + 60 = 20$$

60 を移項した後，両辺を 2 で割って，

$$a^2 + b^2 - 6a - 8b = -20$$

a，b それぞれを平方完成する。

$$(a-3)^2 - 9 + (b-4)^2 - 16 = -20$$

$$(a-3)^2 + (b-4)^2 = -20 + 9 + 16$$

$$(a-3)^2 + (b-4)^2 = 5$$

足し合せて 5 になる自然数の二乗は，1^2 と 2^2 である。

よって，$(a-3)^2=1, (b-4)^2=4 \Rightarrow$ ① と，$(a-3)^2=4, (b-4)^2=1 \Rightarrow$ ② に分けて場合の数を求める。

①の場合

$(a-3)^2=1$
$(a-3)=\pm1$
$a=2,4$
$(b-4)^2=4$
$(b-4)=\pm2$
$b=2,6$
よって，
$(a,b)=(2,2),(2,6),(4,2),(4,6)$

②の場合

$(a-3)^2=4$
$(a-3)=\pm2$
$a=1,5$
$(b-4)^2=1$
$(b-4)=\pm1$
$b=3,5$
よって，
$(a,b)=(1,3),(1,5),(5,3),(5,5)$

$(2,6),(4,2)$ はそれぞれ，点 A，点 B なので除外すると，AB が斜辺となる △ABP は 6 通りである。

■(b)　AB が直角を挟む一辺の場合，
$AB^2+PA^2=PB^2 \Rightarrow$ ① と，$AB^2+PB^2=PA^2 \Rightarrow$ ②の場合を考える。

①の場合

$$20+(a-2)^2+(b-6)^2=(a-4)^2+(b-2)^2$$
$$20+(a^2-4a+4)+(b^2-12b+36)=(a^2-8a+16)+(b^2-4b+4)$$
$$4a-8b=-40$$
$$a-2b=-10$$
$$2b=a+10$$
$$b=\frac{a+10}{2}$$

これを満たす $1 \leq a, b \leq 6$ は，P(a,b)=(2,6) である。

しかし，これは点 A と一致するので三角形を作らない。

②の場合

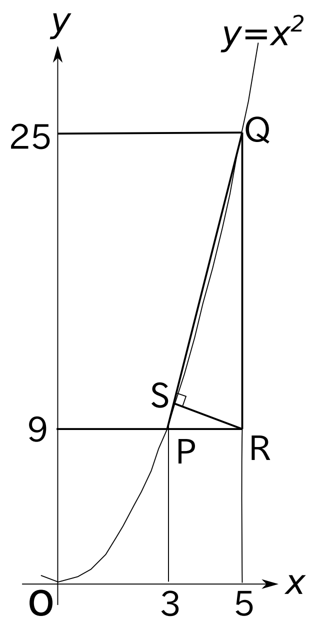
$$20+(a-4)^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b-6)^2$$
$$20+(a^2-8a+16)+(b^2-4b+4)=(a^2-4a+4)+(b^2-12b+36)$$
$$4a-8b=0$$
$$a=2b$$

これを満たす $1 \leq a, b \leq 6$ は，P(a,b)=(2,1),(4,2),(6,3) である。
しかし，(4,2) は点 B と一致するので三角形を作らない。
よって，$P(a,b)=(2,1),(6,3)$。AB が直角を挟む一辺となる △ABP は2 通りである。

■ 従って (a)，(b) の場合を合わせて直角三角形は，$6+2=8$ 通り出来る。
よって，△PAB が直角三角形となる確率は，$\therefore \dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$ である。

小問 (4)

点 P，点 Q，点 R の座標は，P(3,9)，Q(5,25)，R(5,9)，$\angle \mathrm{PRQ}=90°$ であり，RS は PQ に直交するので，



$$\triangle \mathrm{PQR} \sim \triangle \mathrm{SRP} \sim \triangle \mathrm{RQS}$$

である。
$\mathrm{RP}=5-3=2$，$\mathrm{QR}=25-9=16$ より，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{2^2+16^2}=\sqrt{260}=2\sqrt{65}$$

△PQR と △SRP の相似比は，

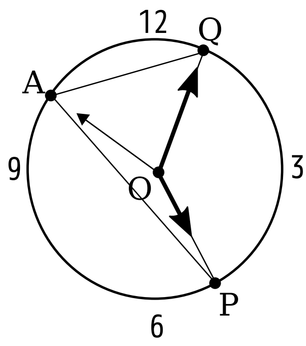
$$\mathrm{PQ}:\mathrm{RP}=2\sqrt{65}:2=\sqrt{65}:1$$

よって，△PQR と △PRS の面積比は，

$$\triangle \mathrm{PQR}:\triangle \mathrm{PRS}=(\sqrt{65})^2:1^2=65:1$$
$$\triangle \mathrm{RQS}=\triangle \mathrm{PQR}-\triangle \mathrm{PRS}$$

よって，$\therefore \triangle \mathrm{PRS}:\triangle \mathrm{RQS}=1:65-1=1:64$

小問 (5)



円周角の定理より，$\angle PAQ = 35^\circ$ の時，$\angle POQ = 70^\circ$ 。長針は 1 分間に $\dfrac{360^\circ}{60} = 6^\circ$，短針は 1 分間に $\dfrac{30^\circ}{60} = \dfrac{1}{2}^\circ$ 進む。つまり，図に与えられた状態では，$\angle POQ$ は 1 分間に $(6-\dfrac{1}{2})^\circ = \dfrac{11}{2}^\circ$ 減少する。

$\angle POQ$(5 時 0 分 0 秒) $= 30^\circ \times 5 = 150^\circ$ なので 5 時 t 分に $\angle PAQ = 35^\circ$ になるとすると，

$$\angle POQ(5 時 t 分) = (150 - \frac{11}{2}t)^\circ = 70^\circ$$

$$\frac{11}{2}t = 150 - 70 = 80$$

$$t = 80 \times \frac{2}{11} = \frac{160}{11}$$

$160 \div 11 = 14$ 余り 6

よって，5 時 14 分 $\boxed{\dfrac{6}{11}}$ 秒。

解説

■　小問 (1) は準備体操です。

■　小問 (2) は 2 乗の差が和と差の積になることを思い出して下さい。

■　小問 (3) は正解率が低かったと思います。2 つのサイコロの目の組み合わせを全て確認していたのでは時間がかかり過ぎます。三平方の定理を用いて方程式を使って解かなければ正解できないです。この解答法を考えられなければ捨てて下さい。また，途中の計算で高校の数学 I で扱う平方完成の計算技法が必要となります。

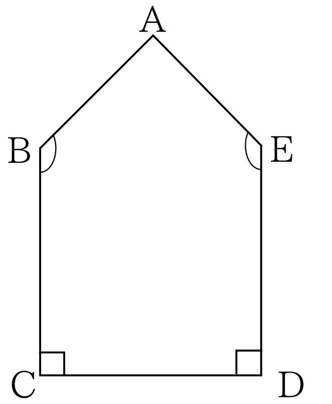
■　小問 (4) は直角三角形の相似の問題です。相似比と面積比を間違いなく計算できれば正解できます。

■　小問 (5) は円周角の定理の問題です。時計の長針と短針の進む速さから，中心角の時間変化の式を立てて下さい。なお，解答では省略しましたが，求めた秒数において秒針が長針と短針の間にあると円周角の定理が使えなくなります。この設問では秒針が，長針と短針の間にはありませんので円周角の定理が成り立っています。

大問 2

問題

右の図のように，BC = CD = DE = 2 cm，$\angle B = \angle E = 135°$，$\angle C = \angle D = 90°$ である五角形 ABCDE がある。このとき，次の問いに答えよ。(13 点)

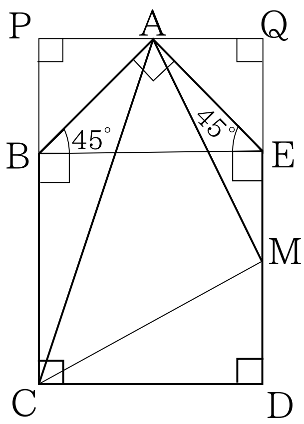


小問 (1)
辺 DE の中点を M とする。$\angle BAC$ と $\angle EAM$ の和を求めよ。

小問 (2)
頂点 B から直線 AC に垂線をひき，その交点を N とする。BN の長さを求めよ。

解答

小問 (1)



四角形 BCDE は正方形なので，

$\angle ABE = \angle AEB = 135° - 90° = 45°$。よって，$\triangle ABE$ は，$\angle A = 90°$ の直角二等辺三角形である。

辺 BC，辺 ED を延長して，A を通り BE に平行な直線との交点を，それぞれ，P，Q とする。

$\triangle AMC$ において，

AQ = 1 cm，QM = 2 cm より，$AM = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ cm

MD = 1 cm，CD = 2 cm より，$CM = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ cm

AP = 1 cm，PC = 3 cm より，$AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ cm

よって，$AM^2 + CM^2 = AC^2$，また，AM = CM。

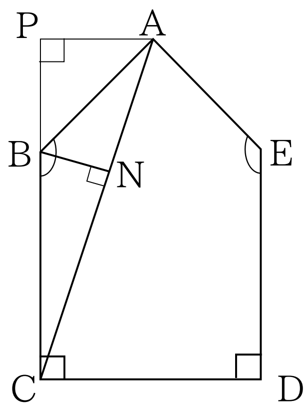
$\triangle AMC$ は AM = CM，$\angle AMC = 90°$ の直角二等辺三角形である。

従って，$\angle CAM = 45°$。

よって，$\therefore\ \angle BAC + \angle EAM = 90° - \angle CAM = 45°$

小問 (2)

$\triangle$ABC の面積は，底辺 BC = 2 cm，高さ PA = 1 cm なので，



$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

この面積を，$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times AC \times BN$ と考えると，(1) より，$AC = \sqrt{10}$ cm なので，

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times BN = 1$$

よって，$\therefore\ \underline{BN = \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{10}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}\ \text{cm}}$

解説

この問題は合格のための必須問題です。直角三角形が使えるので，三平方の定理を使って辺の長さを計算して考えます。

■(1)　$\triangle$ABE が直角二等辺三角形なので，$\angle BAE = 90^\circ$ です。AM，AC，CM の長さを三平方の定理で計算して，$\triangle$AMC が直角二等辺三角形である事に気づいて下さい。この問題のように直角三角形が使える時は三平方の定理で辺の長さを求めて考えることが解法の定石です。

■(2)　垂線の長さを求める問題は，面積を使って考えるのが解法の定石です。$\triangle$ABC の面積が，BC を底辺，AP を高さとして求めることに気がつければ OK です。

大問 3

問題

3 倍しても，11 倍しても n 桁となる正の整数がいくつあるかを考え，その個数の一の位の数を $f(n)$ で表す。このとき，次の問いに答えよ。

ただし，n を 2 以上の整数とする。(13 点)

(1)　$f(5)$ を求めよ。

(2)　$f(2018)$ を求めよ。

解答

小問 (1)

3 倍しても 11 倍しても 5 桁になる数は 4 桁である。4 桁の数を $ABCD$ とおいて筆算を考える。

① $ABCD \times 3$ の筆算

$$
\begin{array}{ccccc}
 & A & B & C & D \\
\times & & & & 3 \\
\hline
 & 3A & 3B & 3C & 3D
\end{array}
$$

② $ABCD \times 11$ の筆算

$$
\begin{array}{ccccc}
 & A & B & C & D \\
\times & & & 1 & 1 \\
\hline
 & A & B & C & D \\
A & B & C & D & \\
\hline
A & A+B & B+C & C+D & D
\end{array}
$$

■①より　$3A$　$3B$　$3C$　$3D$ が 5 桁の数になるのは，$3A$ が 2 桁の数である (a)，$3A$ が 9 で $3B$ からの桁上がりある (b)，$3A$，$3B$ が 9 で $3C$ から桁上がりがある (c)，さらに $3A$，$3B$，$3C$ が 9 で $3D$ から桁上がりがある (d) の場合の 4 つの場合がある。

これをまとめると、

$$\begin{cases} A=4,5,\cdots,9 \quad B=0,1,\cdots,9 \quad C=0,1,\cdots,9 \quad D=0,1,\cdots,9 \Rightarrow \text{(a)} \\ A=3 \begin{cases} B=4,5,\cdots,9 \quad C=0,1,\cdots,9 \quad D=0,1,\cdots,9 \quad \Rightarrow \text{(b)} \\ B=3 \begin{cases} C=4,5,\cdots,9 \quad D=0,1,\cdots,9 \quad \Rightarrow \text{(c)} \\ C=3 \quad D=4,5,\cdots,9 \quad \Rightarrow \text{(d)} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

■②より　A が 8 以下の場合 (e) には，A　$A+B$　$B+C$　$C+D$　D は必ず 5 桁になる。$A=9$ の場合は 4 桁目からの桁上がりがあると 6 桁の数になるので，$A+B$ が 1 桁でなければばならない。よって，$B=0$ である。この時，下位 $B+C$，$C+D$ からの桁上がりもあってはならない。このために $C=8$ 以下の場合 (f)，$C=9, D=0$ の場合 (g) に分かれる。

これをまとめると、

$$\begin{cases} A=1,2,\cdots,8 \quad B=0,1,\cdots,9 \quad C=0,1,\cdots,9 \quad D=0,1,\cdots,9 \Rightarrow \text{(e)} \\ A=9 \quad B=0 \begin{cases} C=0,1,\cdots,8 \quad D=0,1,\cdots,9 \Rightarrow \text{(f)} \\ C=9 \quad D=0 \Rightarrow \text{(g)} \end{cases} \end{cases}$$

①，②の (a)〜(g) となる数の共通部分を求めて、数の個数を計算する。①の結果より $A \geq 3$ であり、$A=3$ の場合は，(b)，(c)，(d) の場合に分ける。また，$A=9$ の場合は，(f)，(g) の場合に分ける。$4 \leq A \leq 8$ の範囲では、全ての数が条件を満たす。

これを表にまとめると，

A	B	C	D	個数
3	3	3	$\underbrace{4,\cdots,9}_{6\text{個}}$	$1\times1\times1\times6=6\times10^0$
3	3	$\underbrace{4,\cdots,9}_{6\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$1\times1\times6\times10=6\times10^1$
3	$\underbrace{4,\cdots,9}_{6\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$1\times6\times10\times10=6\times10^2$
$\underbrace{4,5,\cdots,8}_{5\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$5\times10\times10\times10=5\times10^3$
9	0	$\underbrace{0,1,\cdots,8}_{9\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$1\times1\times9\times10=9\times10^1$
9	0	9	0	$1\times1\times1\times1=1\times10^0$
				$5\times10^3+6\times10^2+15\times10^1+7$

表の灰色で示した第 1 行目と最終行の和が合計個数の 1 桁目になる。

よって，$\therefore\ \underline{f(5) = 7}$

小問 (2)

$n = 6$ の場合について (1) と同様に考える。3 倍しても 11 倍しても 6 桁になる数は 5 桁の数なので，これを $A\ B\ C\ D\ E$ と置く。

① $ABCDE \times 3$ の筆算

$$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ \times & & & & & 3 \\ \hline & 3A & 3B & 3C & 3D & 3E \end{array}$$

② $ABCDE \times 11$ の筆算

$$\begin{array}{cccccc} & A & B & C & D & E \\ \times & & & & 1 & 1 \\ \hline & A & B & C & D & E \\ A & B & C & D & E & \\ \hline A & A+B & B+C & C+D & D+E & E \end{array}$$

(1) と同様にまとめる。

■①より　$3A\quad 3B\quad 3C\quad 3D\quad 3E$ が 6 桁の数になるのは，$3A$ が 2 桁の数である (a)，$3A$ が 9 で $3B$ からの桁上がりある (b)，$3A$，$3B$ が 9 で $3C$ から桁上がりがある (c)，$3A$，$3B$，$3C$ が 9 で $3D$ から桁上がりがある (d)，$3A$，$3B$，$3C$，$3D$ が 9 で $3E$ から桁上がりがある (e)，の場合の 5 つの場合がある。

これをまとめると、

$$\begin{cases} A = 4, 5, \cdots, 9 \quad B = 0, 1, \cdots, 9 \quad C = 0, 1, \cdots, 9 \quad D = 0, 1, \cdots, 9 \quad E = 0, 1, \cdots, 9 \Rightarrow \text{(a)} \\ A = 3 \begin{cases} B = 4, 5, \cdots, 9 \quad C = 0, 1, \cdots, 9 \quad D = 0, 1, \cdots, 9 \quad E = 0, 1, \cdots, 9 \Rightarrow \text{(b)} \\ B = 3 \begin{cases} C = 4, 5, \cdots, 9 \quad D = 0, 1, \cdots, 9 \quad E = 0, 1, \cdots, 9 \Rightarrow \text{(c)} \\ C = 3 \begin{cases} D = 4, 5, \cdots, 9 \quad E = 0, 1, \cdots, 9 \Rightarrow \text{(d)} \\ D = 3 \quad E = 4, 5, \cdots, 9 \Rightarrow \text{(e)} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

■②より　A が 8 以下の場合 (f) には，$A\quad A+B\quad B+C\quad C+D\quad D+E\quad E$ は必ず 6 桁になる。$A = 9$ の場合は $A+B$ からの桁上がりがあると 7 桁の数になるので，$A+B$ が

1 桁でなければならない。よって，$B=0$ である。この時，下位 $B+C$，$C+D$ からの桁上がりもあってはならない。このために $C=8$ 以下の場合 (g)，$C=9, D=0$ の場合 (h) に分かれる。前問 (1) と異なり $D=0$ なので，E の値に関わらず 2 桁目 $D+E$ からの桁上がりはないので，最下位 E は 0〜9 の値を取る。

これをまとめると、

$$\begin{cases} A=1,2,\cdots,8 \quad B=0,1,\cdots,9 \quad C=0,1,\cdots,9 \quad D=0,1,\cdots,9 \quad E=0,1,\cdots,9 \Rightarrow \text{(f)} \\ A=9 \quad B=0 \begin{cases} C=0,1,\cdots,8 \quad D=0,1,\cdots,9 \quad E=0,1,\cdots,9 \Rightarrow \text{(g)} \\ C=9 \qquad D=0 \quad E=0,1,\cdots,9 \Rightarrow \text{(h)} \end{cases} \end{cases}$$

①，②の (a)〜(g) の共通部分を求めて、数の個数を計算する。①の結果より $A \geq 3$ であり、$A=3$ の場合は，(b)〜(e) の場合に分ける。また，$A=9$ の場合は，(g)，(h) の場合に分ける。$4 \leq A \leq 8$ の範囲では、全ての数が条件を満たす (f)。

これを表にまとめると，

A	B	C	D	E	個数
3	3	3	3	$\underbrace{4,\cdots,9}_{6\text{個}}$	$1\times1\times1\times1\times\times6=6\times10^0$
3	3	3	$\underbrace{4,\cdots,9}_{6\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$1\times1\times1\times6\times10=6\times10^1$
3	3	$\underbrace{4,\cdots,9}_{6\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$1\times1\times6\times10\times10=6\times10^2$
3	$\underbrace{4,\cdots,9}_{6\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$1\times6\times10\times10\times10=6\times10^3$
$\underbrace{4,\cdots,8}_{5\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$5\times10\times10\times10\times10=5\times10^4$
9	0	$\underbrace{0,\cdots,8}_{9\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$1\times1\times9\times10\times10=9\times10^2$
9	0	9	0	$\underbrace{0,\cdots,9}_{10\text{個}}$	$1\times1\times1\times1\times10=1\times10^1$
					$5\times10^4+6\times10^3+15\times10^2+1\times10^1+6$

$n=6$ の場合，灰色で示した第 1 行目のみが合計個数の第一位になる。$n=6$ では，(h) に相当する最終行で、E が 0〜9 を取りうるので、最終行は合計個数の第二位に寄与して、

第一位には寄与しなくなるからである。更に他の n について同様の考察を行うと、表の最終行に相当する $\underbrace{A \quad B \quad C \cdots}_{n-1\text{ 個}}$ において，n が奇数の時はの第一位の値が 0 しか許されず、偶数の場合は 0〜9 が許されることが分かる。つまり，n が奇数の時は $f(n)$（合計個数の第一位の数）は表の第 1 行と最終行の和となり，偶数の時は表の第 1 行のみになる。

従ってまとめると，

$$f(n) = \begin{cases} 6 & (n \text{ が偶数の場合 }) \\ 7 & (n \text{ が奇数の場合 }) \end{cases}$$

よって，$\therefore \underline{f(2018) = 6}$

解説

今年の数学の入試問題の最難問です。掛け算の筆算の仕組み，特に桁上がりが理解できているか，それに加えて場合の数の計算が正確に出来るかを問う問題です。

解答に示したように相当量の計算が必要になります。正直なところ，私も正解に至るまでかなりの時間がかかりました。解答では $n = 5, 6$ についてのみ示していますが，(2) を解くために実際には $n = 2, 3, 4$ も計算して初めて n が偶数と奇数の場合の $f(n)$ が決まるメカニズムが理解できました。

入試的には捨て問ですが，如何に捨て問であるかを解答を見てじっくり味わって下さい。

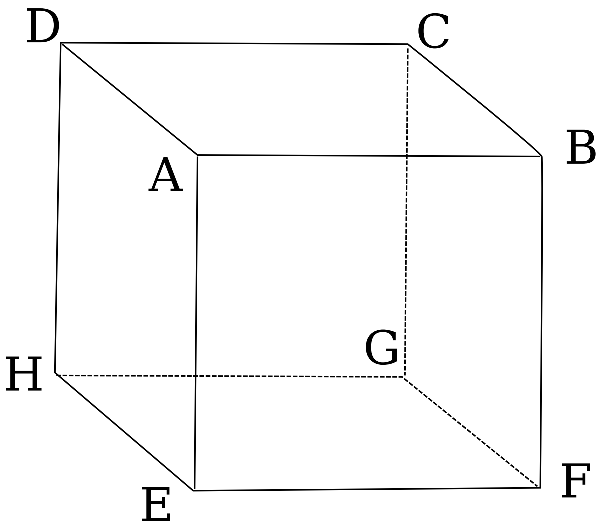
大問 4

問題

下の図のように，1 辺の長さが $\sqrt{2}$ cm の立方体 ABCD-EFGH がある。その頂点を結んでできる三角すい ACFH について，次の問いに答えよ。(13 点)

小問 (1)
三角すい ACFH の体積を求めよ。

小問 (2)
辺 AC,AF,AH 上にそれぞれ点 I，J，K を $AI = AJ = AK = a$ cm$(0<a<2)$ となるようにとる。3 点 I，J，K を通る平面で三角すい ACFH を切断するとき，頂点 A を含まない方の立体の表面積を求めよ。



解答

小問 (1)

体積の関係は，

三角錐 ACFH
= 立方体 ABCD-EFGH
− (三角錐 AEFH + 三角錐 ADCH + 三角錐 ABCF + 三角錐 GCFH)

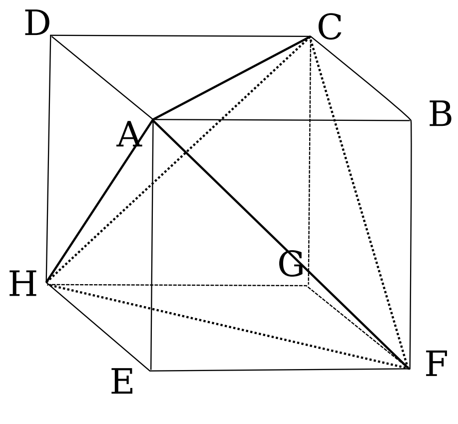
ここで，

三角錐 AEFH ≡ 三角錐 ADCH ≡ 三角錐 ABCF ≡ 三角錐 GCFH

この体積を V とすると，立方体の一辺が $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$ なので，

$$V = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{cm}^3$$

立方体 ABCD-EFGH 体積 $= (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^3$



三角錐 ACFH 体積 $= 2\sqrt{2} - 4V$
$$= 2\sqrt{2} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$$
$$= \underline{\frac{2\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{cm}^3}$$

小問 (2)

頂点 A を含まない方の立体の底面を △CFH，上面を △IJK とすると、

求める立体の表面積 = △IJK + 側面積 + △CFH

ここで，

三角錐 ACFH の表面積 − 三角錐 AIJK の表面積 = 側面積 + △CFH − △IJK

よって，

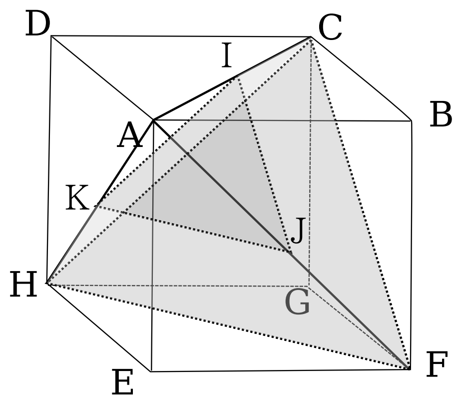
求める表面積 = 三角錐 ACFH の表面積 − 三角錐 AIJK の表面積 + 2 × △IJK

三角錐 ACFH は正四面体で一辺は，2cm。

$$\triangle CFH = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$$

よって，

$$三角錐\ ACFH\ の表面積 = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$$



三角錐 AIJK も正四面体で，三角錐 AIJK と三角錐 ACFH の相似比は，

$$AI : AC = a : 2$$

よって，三角錐 AIJK と 三角錐 ACFH の表面積比 $= a^2 : 4$ である。

$$三角錐\ AIJK\ 表面積 = 4\sqrt{3} \times \frac{a^2}{4} = \sqrt{3}a^2\,\mathrm{cm}^2$$

$\triangle IJK$ と $\triangle CFH$ の相似比も同様に $AI : AC = a : 2$。面積比は，$\triangle IJK : \triangle CFH = a^2 : 4$ である。

$$\triangle IJK = \sqrt{3} \times \frac{a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

ゆえに，

$$\therefore\ 求める表面積 = 4\sqrt{3} - \sqrt{3}a^2 + \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \times 2$$
$$= \underline{4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}a^2}{2}\,\mathrm{cm}^2}$$

解説

■(1)　三角錐 ACFH は辺の長さが全て等しいので正四面体であること，そして，残された 4 つの三角錐が合同であることに気がついて下さい。1 つの三角錐の体積は元の立方体の辺の長さから簡単に求まるので，4 倍して元の立方体の体積から引くだけです。この問題は合格のための必須問題です。

■(2)　三角錐 ACFH の表面積から，三角錐 AIJK の表面積を引いたものが，求める立体の表面積 − $\triangle IJK$ になる事に注意して下さい。三角錐 AIJK の表面積と $\triangle IJK$ の面積は，相似を使って求めます。この問題は確実に合格するためには正解出来る事が望ましいです。

大問 5

問題

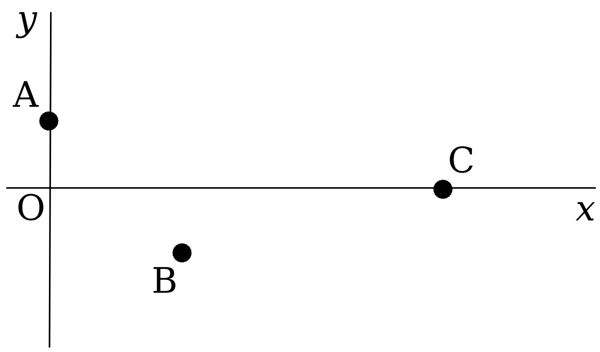
下の図のように，3 点 A(0,3)，B(6,-3)，C(18,0) がある。点 P は原点 O から出発して x 軸上を秒速 1 で点 C に向かって C まで移動する。出発してから t 秒後の，線分 PA，PB，PC の長さの中で最も小さいものを $d(t)$ と表す。 このとき，次の問いに答えよ。

ただし，(3) においては，考え方のすじ道がわかるように答えを求める過程も答案用紙の解答欄に記入せよ。(18 点)

(1) $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=55$ となる t の値をすべて求めよ。

(2) $d(t)^2=\mathrm{PB}^2$ となるのは，P が O から出発して何秒から何秒までの間か求めよ。

(3) $d(t)^2=25$ となる t の値をすべて求めよ。



解答

小問 (1)

P の座標は $(t,0)$ なので，$\mathrm{PA}^2=t^2+3^2$，$\mathrm{PB}^2=(t-6)^2+(0-3)^2$，

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=t^2+9+(t-6)^2+9=55$$

展開整理して，$2t^2-12t-1=0$

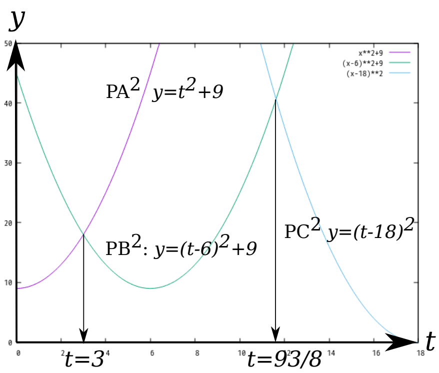
$$t=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-2\times(-1)}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36+2}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{38}}{2}$$

$t\geq 0$ なので，$\therefore\ t=3+\dfrac{\sqrt{38}}{2}$

小問 (2)

$d(t)^2 = \mathrm{PB}^2$ より，$\mathrm{PB} \leq \mathrm{PA}, \mathrm{PC}$ となる t を求める。

$\mathrm{PA}^2, \mathrm{PB}^2, \mathrm{PC}^2$ をそれぞれ t の関数として描くと右図のようになる。PA^2と PB^2，PB^2と PC^2 のそれぞれの交点間の t で $d(t)^2 = \mathrm{PB}^2$ となる。



① PA^2 と PB^2 の交点

$\mathrm{PA}^2 = \mathrm{PB}^2$ より，

$$t^2 + 9 = (t-6)^2 + 9$$

$$t^2 = t^2 - 12t + 36$$

$$12t = 36$$

よって，$\underline{t = 3}$

② PA^2 と PB^2 の交点

$\mathrm{PB}^2 = \mathrm{PC}^2$ より，

$$(t-6)^2 + 9 = (t-18)^2$$

$$t^2 - 12t + 36 + 9 = t^2 - 36t + 324$$

$$24t = 279$$

よって，$\underline{t = \dfrac{279}{24} = \dfrac{93}{8}}$

①，②より，$\therefore$ $\underline{3 \text{ 秒から} \dfrac{93}{8} \text{秒まで}}$

小問 (3)

(2) より，

$$d(t) = \begin{cases} \mathrm{PA} & 0 \leq t < 3 \text{ のとき} \\ \mathrm{PB} & 3 \leq t < \dfrac{93}{8} \text{ のとき} \\ \mathrm{PB} & \dfrac{93}{8} \leq t \leq 18 \text{ のとき} \end{cases}$$

① $\mathrm{PA}^2 = t^2 + 9 = 25$

$t^2 = 16$

$t = \pm 4$

$0 \leq t < 3$ なのでこの解は不適。

② $\mathrm{PB}^2 = (t-6)^2 + 9 = 25$

$(t-6)^2 = 16$

$t - 6 = \pm 4$

$t = 2, 10$

$3 \leq t < \dfrac{93}{8}$ より，$t = 2$ は不適。

③ $\mathrm{PC}^2 = (t-18)^2 = 25$

$t - 18 = \pm 5$

$t = 13, 23$

$\dfrac{93}{8} \leq t \leq 18$ より，$t = 18$ は不適。

よって，①，②，③，より，$\therefore$ $\underline{t = 10, 13\text{ 秒}}$

解説

■(1)　三平方の定理を使って，PA^2 と PB^2 を求めて二次方程式を作れば解けます。この小問は正解して下さい。

■(2)　この小問は，高校の数学 I の一般の二次関数のグラフについての知識がないと考えにくいです。$d(t)^2 = \mathrm{PB}^2$ になるのは，PA^2 と PB^2，PB^2 と PC^2，それぞれの交点の間の区間になります。

■(3)　前問が解ければ，この小問はそれほど難しくはありません。但し，考え方の筋道を記述させるので，得られた二次方程式の解が t のそれぞれの区間にあるかどうかを明記して下さい。

大問 6

問題

方程式$4x+3y=123$のグラフとx軸との交点をS，y軸との交点をTとする。線分ST(両端の点S，Tを含む)上の点でx座標，y座標がともに整数である点を格子点と呼ぶことにする。このとき，次の問いに答えよ。

ただし，(2)においては，考え方のすじ道がわかるように答えを求める過程も答案用紙の解答欄に記入せよ。(17点)

(1)　格子点の個数を求めよ。

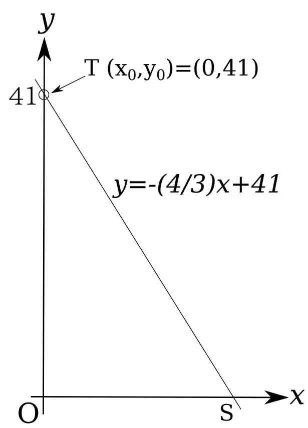
(2)　直線$y=\sqrt{3}x$は2つの隣り合った格子点の間を通過する。この隣り合う格子点のうち,x座標の小さい方と大きい方をそれぞれ点A，点Bとする。AとBの座標を求めよ。ただし，必要なら$1.7<\sqrt{3}<1.8$であることを用いてよい。

(3)　(2)で求めたA，Bからy軸に垂線を引き，y軸と垂線の交点をそれぞれP，Qとする。四角形PQBAをy軸の周りに一回転させてできる立体の表面積を求めよ。

解答

小問 (1)

与式より $y=-\dfrac{4}{3}x+41$ であるので、$x\geq 0$，$y\geq 0$ であり。x が最小の格子点は $(x,y)=(0,41)$ である。この格子点を (x_0,y_0) として、他の格子点を $(x,y)=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ として与式に代入する。



$$4(x_0+\Delta x)+3(y_0+\Delta y)=123$$
$$4x_0+3y_0=123$$

両辺を引き算して，

$$4\Delta x+3\Delta y=0$$

$$4\Delta x = -3\Delta y$$

4 と 3 は互いに素なので，Δx は 3 の倍数，Δy は 4 の倍数である。$\Delta x > 0$ なので，$\Delta y < 0$ である。よって、N を $N \geq 0$ の整数として、$\Delta y = -4N$ と置くことが出来る。$y \geq 0$ より，

$$y = y_0 + \Delta y = 41 - 4N \geq 0$$

$$4N \leq 41$$

$$N \leq \frac{41}{4}$$

N の最大値は 10 である。

従って、$\underbrace{N = 0, 1, \cdots 10}_{11\text{個}}$ となるので、

$\therefore$ 格子点は 11 個である。

小問 (2)

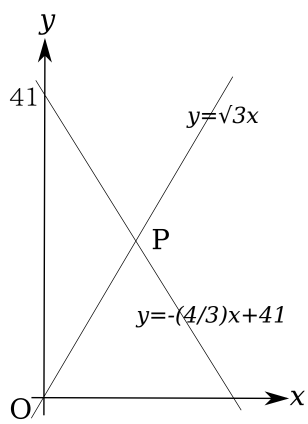
$$\begin{cases} y = -\dfrac{4}{3}x + 41 & \cdots ① \\ y = \sqrt{3}x & \cdots ② \end{cases}$$

を解く。$\sqrt{3}\,x = -\dfrac{4}{3}x + 41$，$\left(\sqrt{3} + \dfrac{4}{3}\right)x = 41$，$\dfrac{3\sqrt{3}+4}{3}\,x = 41$ より、

$$x = \frac{3 \times 41}{3\sqrt{3}+4} = \frac{123(3\sqrt{3}-4)}{(3\sqrt{3}+4)(3\sqrt{3}-4)}$$
$$= \frac{123(3\sqrt{3}-4)}{27-16} = \frac{123}{11}(3\sqrt{3}-4)$$

②に代入して

$$y = \frac{123}{11}(3\sqrt{3}-4) \times \sqrt{3} = \frac{123}{11}(9 - 4\sqrt{3})$$



よって，交点 P は，$\mathrm{P}\left(\dfrac{123}{11}(3\sqrt{3}-4), \dfrac{123}{11}(9-4\sqrt{3})\right)$ である。

$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ を用いて近傍の格子点を求める。

$\sqrt{3} \approx 1.7$ の時 $\mathrm{P}(p,q)$ の座標は

$$\begin{aligned} p &= \frac{123}{11}(3\times 1.7 - 4) \\ &= \frac{123}{11}(5.1 - 4) \\ &= \frac{123}{11}\times 1.1 \\ &= 12.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{123}{11}(9 - 4\times 1.7) \\ &= \frac{123}{11}(9 - 6.8) \\ &= \frac{123}{11}\times 2.2 \\ &= 24.6 \end{aligned}$$

$$\therefore (p,q) = (12.3, 24.6)$$

$\sqrt{3} \approx 1.8$ の時 $\mathrm{P}(p,q)$ の座標は

$$\begin{aligned} p &= \frac{123}{11}(3\times 1.8 - 4) \\ &= \frac{123}{11}(5.4 - 4) \\ &= \frac{123}{11}\times 1.4 \\ &\approx 15.68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{123}{11}(9 - 4\times 1.8) \\ &= \frac{123}{11}(9 - 7.2) \\ &= \frac{123}{11}\times 1.8 \\ &\approx 20.16 \end{aligned}$$

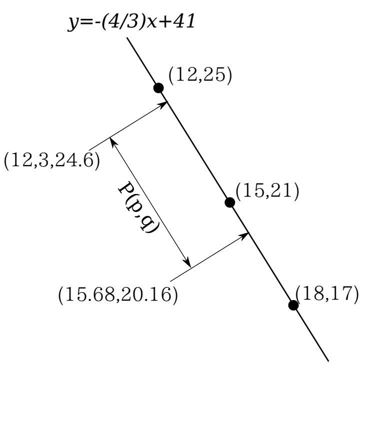
$$\therefore (p,q) \approx (15.68, 20.16)$$

よって,

$$\begin{cases} 12.3 < p < 15.68 \\ 24.6 > q > 20.16 \end{cases}$$

$x = 3N, y = 41 - 4N (N = 0, 1, \cdots 10)$ より，この付近の格子点とこの (p,q) の範囲を図示する。

$$\begin{aligned} x &= 3\times 4 = 12 \\ y &= 41 - 4\times 4 = 25 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 3\times 5 = 15 \\ y &= 41 - 4\times 5 = 21 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 3\times 6 = 18 \\ y &= 41 - 4\times 6 = 17 \end{aligned}$$

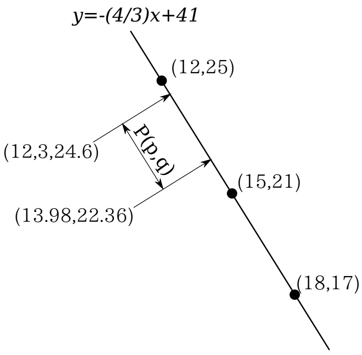


しかし，$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ から得られた (p,q) の範囲は中央の格子点を跨いでしまうために隣接する格子点の組を決めることができない。$1.75^2 = 3.0625$ より，$1.7 < \sqrt{3} < 1.75$ であるので、この値を用いて (p,q) の範囲を絞り込む。

$\sqrt{3} \approx 1.75$ の時 $\mathrm{P}(p,q)$ の座標は,

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{123}{11}(3 \times 1.75 - 4) \\
&= \frac{123}{11}(5.25 - 4) \\
&= \frac{123}{11} \times 1.25 \\
&\approx 13.98
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
q &= \frac{123}{11}(9 - 4 \times 1.75) \\
&= \frac{123}{11}(9 - 7) \\
&= \frac{123}{11} \times 2 \\
&\approx 22.36
\end{aligned}
$$

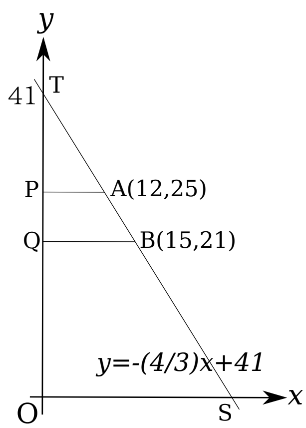
$\therefore (p, q) \approx (13.98, 22.36)$



よって，$\therefore$ $\underline{A(12, 25), B(15, 21)}$

小問 (3)

求める立体は，△TQB を y 軸の周りに回転させてできる円錐から，△TPA を y 軸の周りに回転させてできる円錐を取り除いたものである。立体の側面積は，△TQB を y 軸の周りに回転させてできる円錐の側面積 S_B から，△TPA を y 軸の周りに回転させてできる円錐の側面積 S_A を引いて求める。求める表面積は，側面積に △TPA の円錐底面積と △TQB の円錐底面積を加えたものである。



扇型 $\mathrm{S_A}$の母線の長さ
$= \sqrt{12^2 + (41-25)^2}$
$= \sqrt{144 + 256}$
$= \sqrt{400} = 20 = 2^2 \times 5$
△TPA の作る円錐底面円周
$= 2 \times 12 \times \pi$
$= 2^3 \times 3 \times \pi$

扇型 S_Bの母線の長さ
$= \sqrt{15^2 + (41-21)^2}$
$= \sqrt{225 + 400}$
$= \sqrt{625} = 25 = 5^2$
△TQB の作る円錐底面円周
$= 2 \times 15 \times \pi$
$= 2 \times 3 \times 5 \times \pi$

よって，

$$\mathrm{S_A} = \frac{1}{2} \times (2^3 \times 3 \times \pi) \times (2^2 \times 5) = 2^4 \times 3 \times 5 \times \pi$$

$$\mathrm{S_B} = \frac{1}{2} \times (2 \times 3 \times 5 \times \pi) \times 5^2 = 3 \times 5^3 \times \pi$$

$$\begin{aligned} S_A - S_B &= 3 \times 5^3 \times \pi - 2^4 \times 3 \times 5 \times \pi \\ &= 3 \times 5 \times \pi \times (5^2 - 2^4) \\ &= 15\pi \times 9 \\ &= 135\pi \end{aligned}$$

上面 (△TPA の作る円錐底面積) $= 12^2\pi = 144\pi$

下面 (△TQB の作る円錐底面積) $= 15^2\pi = 225\pi$

よって，

上面 + 下面 + $(S_B - S_A) = 144\pi + 225\pi + 135\pi = \underline{504\pi\mathrm{cm}^2}$

解説

■(1)　与式を一次関数の形に変形すれば，最初の格子点はすぐに見つかります。残りの格子点は，x が 3 増加すると y が 4 減少する事を用いて数えてもいいですが，解答のように高校の数学Ａで扱う整数論を使えばきれいな解答が出来ます。

■(2)　2 直線の交点は等置法 (代入法) を用いて求めるだけですが，解が複雑なので正確に計算して下さい。また，高校の数学 I で扱う分母の有理化の計算が必要になります。さらに，この問題は考え方の筋道を記述させるのでここからが問題です。$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ を用いると，解答にあるように P の存在範囲が格子点を跨いでしまうために隣接する格子点の組を決めることが出来ません。$1.7 < \sqrt{3} < 1.75$ は，$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ に含まれるのでこの範囲を用いて隣接する格子点の組を求めましたが，$\sqrt{3} \approx 1.7320508$ を有効数字 3 桁で用いてもいいと思います。

■(3)　小問 (2) が解ければさほど難しくはありません。求める立体の側面積が大小 2 つの三角錐の側面積の差になることを用います。なお，計算では解答に示したように素因数分解した形で計算を進めると，間違いが少なく速く計算出来ます。